

Pismeni ispit iz Matematike I, 29.06.2012., termin 9h

I GRUPA

- Dokazati identitete: a) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, n \geq k+1$;
b) $\binom{n+m}{m} = \binom{n+m}{n}$ ($n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$).
- Zadan je trougao ABC u kome je $|AB|=2$, $|AC|=3$, $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Izračunati pomoću vektorskog računa dužine težišnica u datom trouglu.
- Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = \frac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2}$ ako se zna da je jedina realna nula te funkcije $x_1 \approx 0,3796$.
- Izračunati integral $\int e^{-x} \cdot \operatorname{arctg} e^x dx$.

II GRUPA

- Riješiti matričnu jednačinu $AX = 2X + A^8$, pri čemu je poznata matrica $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$, $a_{ij} = j - i + 1$.
- Zadan je trougao ABC u kome je $|AB|=3$, $|BC|=4$, $\sphericalangle ABC = 30^\circ$. Izračunati pomoću vektorskog računa dužine težišnica u datom trouglu.
- Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = \frac{(12x^2 - 3)(x+3) + (x^2 - 9)(2x-1)}{4x^3 - x}$.
- Izračunati integral $\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$.

III GRUPA

- Riješiti jednačinu $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$ u skupu kompleksnih brojeva.
- Zadan je trougao ABC u kome je $|AC|=2$, $|BC|=5$, $\sphericalangle ACB = 45^\circ$. Izračunati pomoću vektorskog računa dužine težišnica u datom trouglu.
- Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = \frac{16x^2 - 10}{3x^2 - 3x^4}$.

Uputa: Funkcija ima dvije prevojne tačke. Apscisa jedne je $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- Izračunati integral $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx$.

Pismeni ispit iz Matematike I, 29.06.2012., termin 12h

GRUPA A

1. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametra λ :

$$\lambda x + y + z + t = 1$$

$$x + \lambda y + z + t = \lambda$$

$$x + y + \lambda z + t = \lambda^2$$

$$x + y + z + \lambda t = \lambda^3.$$

2. Naći tačku A koja leži na pravoj $a: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5}$ i jednako je udaljena od tačke $B(0,1,1)$ i ravni $\alpha: 2x - y + 2z + 1 = 0$.

3. Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = \frac{x \ln x}{\ln x - 2}$.

4. Izračunati integral $I = \int \frac{dx}{x + 2\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^4}}$.

GRUPA B

1. Riješiti jednačinu
$$\begin{vmatrix} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) & \sin x & \cos x \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) & \cos x & \sin x \\ 1 & a & 1-a \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}-2}{4}.$$

2. Naći tačku A koja leži na pravoj $a: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{1}$ i na udaljenosti je $\sqrt{3}$ od ravni $x + y + z + 3 = 0$.

3. Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = \frac{x^4 - 6x^2 + 8x - 3}{x+1}$. Uputa: Jedna prevojna tačka ima apscisu $x_0 \approx -2,27$.

4. Izračunati integral $I = \int \frac{dx}{2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}$.

GRUPA C

1. Odrediti vrijednost parametra k tako da sistem

$$8z - 3x - 6y = kx$$

$$2x + y + 4z = ky$$

$$4x + 3y + z = kz$$

ima beskonačno mnogo rješenja. Zatim naći ta rješenja za najveću dobijenu vrijednost parametra k .

2. Napisati jednačinu prave koja leži u ravni $\pi: 2x + 3y - z + 1 = 0$, zaklapa minimalan ugao sa

pravom $p: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}$ i na minimalnoj je udaljenosti od tačke $O(0,0,0)$.

3. Ispitati i nacrtati graf funkcije $y = 1 - \frac{2}{e^{2(x^2-x^3)} + 1}$ bez analize znaka drugog izvoda.

4. Izračunati integral $I = \int \frac{dx}{x^3 \sqrt[3]{2-x^3}}$.